Adı Soyadı:
Numarası:

1	***2***	***3***	***4***	***5***	***Toplam***

MAT478 ÖKLİDYEN OLMAYAN GEOMETRİ BÜTÜNLEME SINAVI (06. 07. 2022)

Soru1: $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z} \in I\!L^3$ olmak üzere $< \vec{X} * \vec{Y}, \vec{Z} >= \det(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ olduğunu gösteriniz**(20 P.)**.

Soru 2: Bir parametreli düzlemsel bir L/L' Lorentz hareketinde L düzleminin (P) hareketli pol eğrisi L' düzleminin (P') sabit pol eğrisi üzerinde kaymaksızın yuvarlandığını gösteriniz.

Soru 3: $I\!L^2$ de A(u) dönme matrisine karşılık gelen

$$A : I\!L^2 \rightarrow I\!L^2$$

lineer dönüşümünün iki nokta arasındaki uzaklığı koruduğunu gösteriniz.

Soru4: Euclid düzleminde hareketli A, E ve sabit E' düzlemleri verilmiş olsun. Bu durumda E/E' hareketinin P pol noktası, A/E hareketinin Q pol noktası ve A/E' hareketinin Q' pol noktasının lineer bağımlı olup-olmadıklarını araştırınız. Eğer lineer bağımlı ise aralarındaki bağıntıyı bulunuz**(20 P.)**

Soru 5: A(lnu) matrisi yardımı ile $\vec{e}_1 = (1,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1)$ birbirine dik olan iki vektörün $u = \ln 5$ kadar dönmeden sonra alacağı yeni konumlarını bulunuz ve dönmeden sonraki birbirlerine göre durumları ve boyları hakkında yorumu yapınız. $P(2,3)$ noktasının $A(ln5)$ dönme matrisi altında alacağı yeni konuma bakıp, geometrik olarak yorumunu yapınız.

NOT: Süre 90 dakikadır.

Prof. Dr. Ayhan TUTAR

CEVAPLAR

CEVAP 1)

$$\left.\begin{aligned}\vec{X} &= (x_1, x_2, x_3)\\ \vec{Y} &= (y_1, y_2, y_3)\\ \vec{Z} &= (z_1, z_2, z_3)\end{aligned}\right\} \in IL^3 \text{ olmak üzere}$$

$$(\vec{X} * \vec{Y}) = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & -\vec{e_3} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \left(x_2y_3 - x_3y_2,\ x_3y_1 - x_1y_3,\ -(x_1y_2 - x_2y_1)\right)$$

şeklinde tanımlandığını biliyoruz.

$$< \vec{X} * \vec{Y},\ \vec{Z} > = x_2y_3z_1 - x_3y_2z_1 + x_3y_1z_2 - x_1y_3z_2 + x_1y_2z_3 - x_2y_1z_3 \qquad (*)$$

ve

$$det(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

$$= x_2y_3z_1 - x_3y_2z_1 + x_3y_1z_2 - x_1y_3z_2 + x_1y_2z_3 - x_2y_1z_3 \qquad (**)$$

dır. $(*)$ ve $(**)$ dan

$$< \vec{X} * \vec{Y},\ \vec{Z} > = det(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$$

elde edilir.

CEVAP 2) Her t anında hareketli (P) pol eğrisi ve sabit (P') pol eğrisi birbirlerine teğet olduklarını biliyoruz. (P) nin t_0, t_1e karşılık gelen noktaları arasındaki yay uzunluğu,

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \|\vec{V_r}\| dt \ \Rightarrow ds = \|\vec{V_r}\| dt \qquad (*)$$

dir.

(P') nın t_0, t_1e karşılık gelen noktaları arasındaki yay uzunluğu,

$$s' = \int_{t_0}^{t_1} \|\vec{V_a}\| dt \ \Rightarrow ds' = \|\vec{V_a}\| dt \qquad (**)$$

olur. Pol eğrileri elde edilirken $\vec{V_f} = 0$ olduğunu biliyoruz. Bu durumda, $\vec{V_a} = \vec{V_r}$ olacağından $\|\vec{V_a}\| = \|\vec{V_r}\|$ dır. $(*)$ve $(**)$ dan

$$ds = ds'$$

elde edilir. Bu ise L düzleminin (P) hareketli pol eğrisisin L' düzleminin (P') sabit pol eğrisi üzerinde kaymaksızın yuvarlanması demektir.

CEVAP 3) $x=(x_1,x_2),\ y=(y_1,y_2)$ $\mathbb{L}^2$ de iki nokta olsun.

$$\overrightarrow{xy}=(y_1-x_1,y_2-x_2)$$

olur.

$$d(x,y)=\|\overrightarrow{xy}\|=|(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2|^{1/2}$$

dir. Diğer taraftan,

$$\overrightarrow{\mathcal{A}(u)x}=(x_1chu+x_2shu,x_1shu+x_2chu),$$
$$\overrightarrow{\mathcal{A}(u)y}=(y_1chu+y_2shu,y_1shu+y_2chu)$$

dır. Buna göre,

$$\begin{aligned}
d(\overrightarrow{\mathcal{A}(u)x},\overrightarrow{\mathcal{A}(u)y}) &= \|\overrightarrow{\mathcal{A}(u)x\mathcal{A}(u)y}\| \\
&= \|((y_1-x_1)chu+(y_2-x_2)shu),((y_1-x_1)shu+(y_2-x_2)chu))\| \\
&= |(y_1-x_1)^2ch^2u+(y_2-x_2)^2sh^2u+2(y_1-x_1)(y_2-x_2)shuchu \\
&\quad -(y_1-x_1)^2sh^2u-(y_2-x_2)^2ch^2u-2(y_1-x_1)(y_2-x_2)shuchu|^{1/2} \\
&= \left|(y_1-x_1)^2\underbrace{(ch^2u-sh^2u)}_{1}-(y_2-x_2)^2\underbrace{(ch^2u-sh^2u)}_{1}\right|^{1/2} \\
&= |(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2|^{1/2} \\
&= \|\overrightarrow{xy}\| \\
&= d(x,y)
\end{aligned}$$

dir.

CEVAP 4) $P(p_1, p_2) = \left(\frac{\sigma_2' - \sigma_2}{\tau - \tau'}, \frac{\sigma_1' - \sigma_1}{\tau - \tau'}\right)$,

$Q(q_1, q_2) = \left(-\frac{\sigma_2}{\tau}, -\frac{\sigma_1}{\tau}\right)$,

$Q'(q_1', q_2') = \left(-\frac{\sigma_2'}{\tau'}, -\frac{\sigma_1'}{\tau'}\right)$ olduğunu biliyoruz.

$$p_2 = \frac{\sigma_1' - \sigma_1}{\tau - \tau'} \Rightarrow (\tau - \tau')p_2 - \sigma_1' + \sigma_1 = 0 \qquad \cdots \ (1)$$

elde edilir.

$q_2 = -\frac{\sigma_1}{\tau} \Rightarrow \sigma_1 = -q_2\tau$ ve $q_2' = -\frac{\sigma_1'}{\tau'} \Rightarrow -\sigma_1' = q_2'\tau'$ bulunur.

σ_1 ve $-\sigma_1'$ değerleri (1) ifadesinde yerlerine yazılırsa,

$(\tau - \tau')p_2 + \tau' q_2' - \tau q_2 = 0 \Rightarrow (\tau - \tau')p_2 - \tau q_2 + \tau' q_2' = 0 \ \cdots \ (*)$

bulunur. Aynı şekilde,

$$p_1 = \frac{\sigma_2' - \sigma_2}{\tau - \tau'} \text{ dan } (\tau - \tau')p_1 - \sigma_2' + \sigma_2 = 0 \qquad \cdots \ (2)$$

elde edilir.

$q_1 = -\frac{\sigma_2}{\tau} \Rightarrow \sigma_2 = -q_1\tau$ ve $q_1' = -\frac{\sigma_2'}{\tau'} \Rightarrow -\sigma_2' = q_1'\tau'$ bulunur. Bulunan

σ_2 ve $-\sigma_2'$ değerleri (2) ifadesinde yerlerine yazılırsa,

$(\tau - \tau')p_1 - q_1\tau + \tau' q_1' = 0 \Rightarrow (\tau - \tau')p_1 - \tau q_1 + \tau' q_1' = 0 \ \cdots \ (**)$

elde edilir.

$(*)$ ve $(**)$ dan

$$(\tau - \tau')P - \tau Q + \tau' Q' = 0$$

yazabiliriz. Bu ise P, Q ve Q' pol noktalarının lineer bağımlı olması demektir. Yani, bu noktalar aynı bir doğru üzerindedirler.

CEVAP 5)

$$< \vec{e_1}, \vec{e_2} > = < (1,0), (0,1) > = 0,$$

$$\|\vec{e_1}\| = \sqrt{|< (1,0), (1,0) >|} = 1,$$

$$\|\vec{e_2}\| = \sqrt{|< (0,1), (0,1) >|} = 1$$

dir.

$$u = ln5 \Rightarrow chu = \frac{1}{2}\left(e^{ln5} + e^{-ln5}\right) = \frac{1}{2}\left(5 + \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{26}{5}\right) = \frac{13}{5},$$

$$sh(ln5) = \frac{1}{2}\left(e^{ln5} - e^{-ln5}\right) = \frac{1}{2}\left(5 - \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{24}{5}\right) = \frac{12}{5} \text{den}$$

$$\mathcal{A}(ln5) = \begin{bmatrix} ch(ln5) & sh(ln5) \\ sh(ln5) & ch(ln5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{13}/_{5} & {}^{12}/_{5} \\ {}^{12}/_{5} & {}^{13}/_{5} \end{bmatrix} \text{ elde edilir.}$$

$$\left(\mathcal{A}(ln5)\right)\vec{e_1} = \begin{bmatrix} {}^{13}/_{5} & {}^{12}/_{5} \\ {}^{12}/_{5} & {}^{13}/_{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{13}/_{5} \\ {}^{12}/_{5} \end{bmatrix}$$

ve

$$\left(\mathcal{A}(ln5)\right)\vec{e_2} = \begin{bmatrix} {}^{13}/_{5} & {}^{12}/_{5} \\ {}^{12}/_{5} & {}^{13}/_{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{12}/_{5} \\ {}^{13}/_{5} \end{bmatrix}$$

bulunur.

Lorentz anlamında $u = ln5$ hiperbolik radyanlık dönmeden sonra $\left(\mathcal{A}(ln5)\right)\vec{e_1}$ ve $\left(\mathcal{A}(ln5)\right)\vec{e_2}$ vektörleri için

$$< \left(\mathcal{A}(ln5)\right)\vec{e_1}, \left(\mathcal{A}(ln5)\right)\vec{e_2} > = \frac{156}{25} - \frac{156}{25} = 0,$$

$$\left\|\left(\mathcal{A}(ln5)\right)\vec{e_1}\right\| = \sqrt{\frac{169 - 144}{25}} = 1,$$

$$\left\|\left(\mathcal{A}(ln5)\right)\vec{e_2}\right\| = \sqrt{\left|\frac{144 - 169}{25}\right|} = 1$$

dir. Buna göre; $u = ln5$ hiperbolik radyanlık dönmeden sonra $\left(\mathcal{A}(ln5)\right)\vec{e_1}$ ve $\left(\mathcal{A}(ln5)\right)\vec{e_2}$ vektörleri birbirlerine yine diktir ve her bir vektörün boyu korunmuş olur.

Şimdi ise $P(2,3)$ noktasının $A(ln5)$ dönme matrisi altında alacağı yeni konuma bakalım:

$$\left(\mathcal{A}(ln5)\right)\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{13}/_{5} & {}^{12}/_{5} \\ {}^{12}/_{5} & {}^{13}/_{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{62}/_{5} \\ {}^{63}/_{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12,4 \\ 12,6 \end{bmatrix}$$

olur. Böylece IL^2 de $u = ln5$ hiperbolik radyanlık dönmeden sonra $P(2,3)$ noktası merkezden(orijinden) uzaklaşır ve null vektöre yaklaştığı görülür.